

Polynômes

Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3,
$3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2,
X^4-X^3+X-2 par X^2-2X+4.

Correction ▼ [000364]

Exercice 2

Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4+X^3-2X+1 \text{ par } X^2+X+1 \text{ à l'ordre 2.}$$

Correction ▼ [000366]

Exercice 3

Trouver les polynômes P tels que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ par $(X+1)^4$:

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé P'.

Combien y a-t-il de solutions de degré ≤ 7 ?

Correction ▼ [000370]

Exercice 4

Effectuer la division de $A = X^6-2X^4+X^3+1$ par $B = X^3+X^2+1$:

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

Correction ▼ [000371]

Exercice 5

Effectuer la division euclidienne de $X^5-7X^4-X^2-9X+9$ par X^2-5X+4.

Correction ▼ [000375]

Exercice 6

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Correction ▼ [000378]

Exercice 7

Calculer $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ lorsque :

1. $P = X^3-X^2-X-2$ et $Q = X^5-2X^4+X^2-X-2$,
2. $P = X^4+X^3-2X+1$ et $Q = X^3+X+1$.

Correction ▼ [000379]

Exercice 8

Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ et X^4+2X^3+X+2,
$X^4+X^3-3X^2-4X-1$ et X^3+X^2-X-1,
$X^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+3$ et $X^4+2X^3+2X^2+X+1$.

Correction ▼ [000380]

Exercice 9

Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU+BV$.

1. $A = X^5+3X^4+2X^3-X^2-3X-2 \quad \text{et} \quad B = X^4+2X^3+2X^2+7X+6.$
2. $A = X^6-2X^5+2X^4-3X^3+3X^2-2X \quad \text{et} \quad B = X^4-2X^3+X^2-X+1.$

Correction ▼ [000387]

Exercice 10

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4+1$, en produit de facteurs irréductibles.

Correction ▼ [000401]

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2}-(4n+1)X^{n+1}+4(n+1)X^n-4X^{n-1}$$

Correction ▼ [000409]

Exercice 12

Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7-X^7-a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Correction ▼ [000410]

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. X^3-3.
2. $X^{12}-1$.

Correction ▼ [000412]

Exercice 14

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. X^6+1.
2. $X^9+X^6+X^3+1$.

Correction ▼ [000423]

Exercice 15

Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Correction ▼ [000426]

Exercice 16

Trouver un polynôme P de degré minimum tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

Correction ▼ [000427]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$, le quotient de A par B est $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et le reste $-47 - 41X$.
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, $B = X^3 + X + 2$ le quotient de A par B est $3X^2 + 2X - 3$ et le reste est $7 - 9X^2 - X$.
3. $A = X^4 - X^3 - X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$, le quotient de A par B est $X^2 + X - 2$ de reste $6 - 9X$.

Correction de l'exercice 2 ▲

$X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(2X^2 - 3X + 1) + X^3(2 - X)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Les solutions sont les polynômes de la forme

$$P = \frac{1}{16}(5X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 35X) + A(X-1)^4(X+1)^4$$

où A est un polynôme quelconque ; une seule solution de degré ≤ 7.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Quotient $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, reste $R = X$.
2. Quotient $Q = 1 - X^2 - X^4$, reste $R = X^5(1 + 2X + X^2)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soient $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$, le quotient de A par B est $X^3 - 2X^2 - 14X - 63$, le reste étant $261 - 268X$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Ce sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. $\text{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$.
2. $\text{pgcd}(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) = 1$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. $\text{pgcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$.
2. $\text{pgcd}(X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, X^3 + X^2 - X - 1) = X + 1$
3. $\text{pgcd}(X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 1, X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1) = 1$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. $D = X^2 + 3X + 2 = A(\frac{1}{18}X - \frac{1}{6}) + B(-\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18})$.
2. $D = 1 = A(-X^3) + B(X^5 + X^3 + X + 1)$.

Correction de l'exercice 10 ▲

$$\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$$

Correction de l'exercice 11 ▲

L'ordre de multiplicité est 2.

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour $a = \frac{1}{64}$; la racine multiple est $-\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. $$\left\{\begin{array}{lll} X^3-3 & = & (X-\sqrt[3]{3})(X^2+\sqrt[3]{3}X+\sqrt[3]{9}) \\ & = & (X-\sqrt[3]{3})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{array}\right.$$
2. $$\left\{\begin{array}{lll} X^{12}-1 & = & (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)\times \\ & & \quad (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \\ & = & (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\times \\ & & \quad \left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\times \\ & & \quad \left(X-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right). \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. $X^6+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.
2. $X^9+X^6+X^3+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Correction de l'exercice 15 ▲

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange ! $P = \frac{1}{3}(X^2-4X-3)$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange ! $P = \frac{1}{2}(3X^3-4X^2-X+2)$.